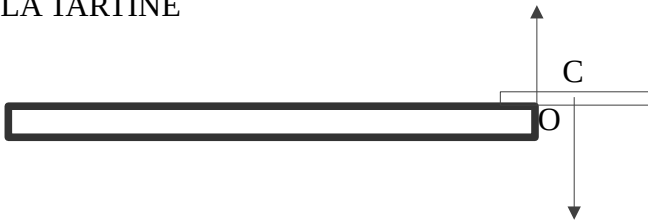


LA TARTINE



Une tartine placée sur le bord d'une table est soumise 2 forces : son poids et la réaction du bord de la table. Le poids est appliqué au centre de masse C. La réaction est appliquée au point de contact O. On utilise le repère d'origine O, d'axe x horizontal (de gauche à droite sur la figure), d'axe y vertical (de bas en haut sur la figure) et d'axe z (perpendiculaire à la figure et qui vient vers nous). La réaction est supposée verticale. On note F son amplitude.

1/Montrer que la somme des forces n'a pas de composante selon les axes z et x. Montrer que la somme des forces a pour composante $F - m g$ selon l'axe y où m désigne la masse de la tartine et g l'accélération de pesanteur.

2/Montrer que la somme des moments calculés au point C n'a pas de composantes selon les axes x et y. Montrer que la somme des moments calculés au point C a pour composante $-F x_C$ selon l'axe z où x_C désigne la coordonnée de C selon l'axe x.

3/ Montrer que l'équilibre est impossible (c'est à dire que la somme des forces et la somme des moments ne peuvent pas être nulles)

On note θ l'angle entre OC et l'axe x. On note y_C la coordonnée de C selon l'axe y. L'épaisseur de la tartine étant faible, on prendra comme valeurs initiales $\theta = 0$ et $y_C = 0$. On suppose aussi que la tartine n'a pas de vitesse initiale, ainsi les dérivées par rapport au temps θ' et y'_C sont nulles à l'instant $t = 0$. La somme des forces n'a pas de composante selon l'axe x donc la dérivée x'_C reste nulle autrement dit x_C reste constant. L'évolution de y_C est déterminée par la relation $m y''_C = F - m g$ où y''_C désigne la dérivée seconde de y_C par rapport au temps. L'évolution de θ est déterminée par la relation $m (\ell^2/12) \theta'' = -F x_C$ où ℓ est la longueur de la tartine et où θ'' désigne la dérivée seconde de θ par rapport au temps.

4/ Montrer que $x_C m y''_C + m (\ell^2/12) \theta'' = -x_C m g$. En intégrant et en tenant compte des conditions initiales montrer que $x_C m y'_C + m (\ell^2/12) \theta' = -x_C m g t$. En intégrant et en tenant compte des conditions initiales, montrer que $x_C m y_C + m (\ell^2/12) \theta = -x_C m g t^2/2$.

5/ Quelle relation géométrique existe-t-il entre x_C , y_C et θ ?
En déduire la relation $x_C^2 \tan \theta + (\ell^2/12) \theta = -x_C g t^2/2$.

6/ En dérivant la dernière relation par rapport au temps, montrer que $\theta' (x_C^2/\cos^2\theta + \ell^2/12) = -x_C g t$. En dérivant une seconde fois, montrer que $\theta'' (x_C^2/\cos^2\theta + \ell^2/12) + \theta'^2 (2x_C^2 \sin\theta / \cos^3\theta) = -x_C g$

7/ À l'aide des relations $x_C^2 \tan \theta + (\ell^2/12) \theta = -x_C g t^2/2$ et $\theta' (x_C^2/\cos^2\theta + \ell^2/12) = -x_C g t$, montrer que $\theta'^2 (x_C^2/\cos^2\theta + \ell^2/12)^2 / (x_C^2 \tan \theta + (\ell^2/12) \theta) = -2 x_C g$

Au moment où la tartine quitte la table, la force F est nulle.

8/ Montrer qu'au moment où la tartine quitte la table $\theta'^2 (2x_C^2 \sin\theta / \cos^3\theta) = -x_C g$. En déduire la relation $(2x_C^2 \sin\theta / \cos^3\theta) (x_C^2 \tan\theta + (\ell^2/12) \theta) / (x_C^2/\cos^2\theta + \ell^2/12)^2 = 1/2$

On note Θ la valeur de l'angle au moment où la tartine quitte la table. Θ vérifie l'équation $(2x_C^2 \sin\Theta / \cos^3\Theta) (x_C^2 \tan\Theta + (\ell^2/12) \Theta) / (x_C^2/\cos^2\Theta + \ell^2/12)^2 = 1/2$

On note Ω la valeur de la vitesse angulaire au moment où la tartine quitte la table. Ω vérifie l'équation $\Omega^2 (2x_C^2 \sin\Theta / \cos^3\Theta) = -x_C g$

La durée de la chute T_{chute} est donnée par la relation $T_{\text{chute}}^2 = 2h/g$ où h désigne la hauteur de la table. Pendant cette chute, la tartine tourne d'un angle ΩT_{chute} . Ainsi l'angle total de rotation de la tartine est $\Theta + \Omega T_{\text{chute}}$

9/ Montrer que $\Theta + \Omega T_{\text{chute}} = \Theta - \sqrt{-h \cos^3\Theta / (x_C \sin\Theta)}$ où $\sqrt{(\)}$ désigne la racine carrée.

10/ Pour une tartine de $\ell = 20$ cm et un décalage initial de $x_C = 1$ cm, on trouve $\Theta = -1.1$ rad. On suppose que la table a une hauteur $h = 1$ m. Montrer qu'au moment où la tartine touche le sol, elle a fait plus qu'un demi tour et moins que trois quart de tour. Sur quelle face finit la tartine ?