Théorie de l'analyse dimensionnelle

Atman Zerkaoui

Le 26/11/2022

Résumé

Pour vérifier la cohérence d'une équation en science physique. Les dimensions, (unités des grandeurs mises en jeu), doivent être cohérentes. La cohérence dimensionnelle n'implique pas qu'une équation physique est exacte mais permet d'invalider les équations qui ne répondent à ce critère. Aussi le champs des équations possibles est restreint. En appliquant cette même méthodologie à des fonctions répondant à certaines critères, on peut en déterminer les propriétés afin de résoudre des problèmes où elles sont mises en jeu. Cet article se cantonnera à l'étude des fonctions non conditionnelles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (puis de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) dans dans leur domaine de définition.

Mots clefs : Mathématiques, Physique.

1 Axiomes

1. Toutes fonctions possèdent une seule et unique dimension par rapport à une variable donnée.
2. La dimension d'une série infinie de fonctions est indéterminée.
3. Toutes fonctions f s'écrit sous la forme $f(x) = v(x) + p(x)$ où $v(x)$ est une fonction distincte de la fonction nulle et $p(x)$ le polynôme de plus haut degré possible de manière à ce que $v(x)$ ne peut s'écrire sous la forme $v(x) = v_1(x) + p_2(x)$ avec $p_2(x)$ le polynôme de plus haut degré possible. Pout toutes fonctions f autre que polynomiale, On étudiera implicitement $v(x)$
4. Les lois de cohérence régissant les dimensions de science physique s'appliquent à la détermination de la dimension d'une fonction.

1.1 Axiome de l'essence

On ne peut additionner des grandeurs d'essences différentes. Les deux grandeurs de part et d'autre de la relation $=$ sont de même substance. Le respect de cet axiome se réalise par deux normalisations :

1. qualitative (de même substance).

2. quantitative (de même unité).

Les règles de dimension en science physique interdisent la somme d'unités différentes. Cet axiome traduit cette règle fondamentale.

1.2 Égalité stricte

Une égalité sera dite stricte si et seulement si elle respecte l'axiome de l'essence.

1. $==$ est une égalité qualitative et quantitative (égalité stricte)
2. $\neq=$ est une égalité quantitative et une différence qualitative.
3. $=\neq$ est une égalité qualitative et une différence quantitative
4. $\neq\neq$ est une différence qualitative et quantitative.

2 Ensemble des dimensions de fonctions de

L'ensemble $\dot{\mathbb{R}}$ des dimensions des fonctions définies par :
$\dot{\mathbb{R}}$=$\mathbb{R} \cup \{\nu\} \cup \{\infty\}$
$\infty \neq \pm\infty$. cette écriture est une notation du fait que l'élément ∞ possède des certaines propriétés semblables aux infinis sans en avoir la définition.

2.1 Lois de $\dot{\mathbb{R}}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \beta \in \mathbb{R}\ \forall \gamma \in \dot{\mathbb{R}}$
$\infty \pm \infty$ est indéterminé.
$\alpha + \beta = \beta + \alpha$
L'opération $-\nu$ est interdite
$\forall \gamma\ \nu + \gamma = \gamma + \nu = \nu$
$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty$
$\frac{1}{\infty} = 0$
$\frac{1}{0} = \infty$
$0 \times \infty$ est indéterminé.
$\frac{\infty}{\infty}$ est indéterminé.
$\frac{0}{0}$ est indéterminé

2.2 Fonction $\dot{max}$

La fonction $\dot{max}$ est une fonction de $\dot{\mathbb{R}}^2 \mapsto \dot{\mathbb{R}}$ définie par :
$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \beta \in \mathbb{R}\ \forall \gamma \in \dot{\mathbb{R}}$
$\dot{max}\,(\alpha;\beta) = max\,(\alpha;\beta)$
$\dot{max}\,(\alpha;\infty) = \dot{max}\,(\infty;\alpha) = \infty$
$\dot{max}\,(\gamma;\nu) = \dot{max}\,(\nu;\gamma) = \gamma$
$\dot{max}(\infty;\infty)$ est indéterminé.

2.3 Transformation en $\dot{\mathbb{R}}$

La fonction $P_{variable}(f)$ est une de transformation d'une fonction f sur $\dot{\mathbb{R}}$ suivant la variable *variable*. Les propriétés de cette transformation sont :
$P_x(f(x) + g(x)) = \dot{max}(P_x(f(x)); P_x(g(x)))$
$P_x(f(x) \times g(x)) = P_x(f(x)) + P_x(g(x))$
$P_x((f^{\circ}g)(x)) = P_x(f(x)) \times P_x(g(x))$

3 Équation dimensionnelle

3.1 Définition

Soit E l'équation $A = B$. L'équation dimensionnelle l'équation E suivant la variable *variable* est $P_{variriable}(E)$ et s'écrit sous la forme $(P_{variable}(A)) = P_{variable}(B)$

3.2 Dimension de fonctions dérivées et de primitives

Conformément aux principes de dimension en science physique
$P_x(f'(x)) = P_x(f(x)) - 1$
$P_x\left(\int f(x)\,dx\right) = P_x(f(x)) + 1$

4 Théorèmes

4.1 $P(0) = \nu$

Démonstration

$\forall f$
$f + 0 = f$
$\Rightarrow \dot{max}(P_x(f(x)); P(0)) = P_x(f(x))$
Par définition de $\dot{max}$, $P(0) = \nu$

4.2 $P(1) = 0$

Démonstration

$P_x(f(x) \times 1) = P_x(f(x)) + P(1)$
$\Rightarrow P(1) = 0$

4.3 $P_x(x) = 1$

Démonstration

Soit $Id(x)$ la fonction identité définie par $Id(x) = x$. $\forall f$
$(f°Id)(x) = f(x)$
$P_x((f°Id)(x)) = P_x(f(x))$
$\Rightarrow P(f(x)) \times P_x(x) = P_x(f(x))$
$\Rightarrow P_x(x) = 1$

4.4 Lemme $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n) = 0$

On sait que $P(1) = 0$
Supposons que $P(N) = 0 \mid N \in \mathbb{N}^*$
$P(N+1) = max(P(N); P(1)) = max(0; 0) = 0$

4.5 Lemme $\forall n \in \mathbb{Z}^*$ $P(n) = 0$

$-1 \times -1 = 1$
$\Rightarrow 2P(-1) = P(1)$
$\Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow P(-1) = 0$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$
$P(n) = 0$
$\Rightarrow P(-1 \times n) = 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^*, P(n) = 0$

4.6 Lemme $\forall r \in \mathbb{Q}^* \mid r = \frac{p}{q} \quad p \in \mathbb{Z}^* \quad q \in \mathbb{Z}^*$ $P(r) = 0$

$\frac{p}{q} \times q = p$
$\Rightarrow P\left(\frac{p}{q} \times q\right) = P(p)$
$\Rightarrow P\left(\frac{p}{q}\right) + P(q) = P(p)$
$\Rightarrow P\left(\frac{p}{q}\right) = P(p) - P(q)$
$\Rightarrow P\left(\frac{p}{q}\right) = 0 - 0 = 0$

4.7 $\forall\alpha \in \mathbb{R}^* \; P(\alpha) = 0$

Démonstration

Soit une suite R_n tel que $\forall n \in \mathbb{N}, R_n \in \mathbb{Q}^* \underset{n\to+\infty}{lim} R_n = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}^*$
$\forall\alpha \in \mathbb{R}^* \; \exists R_n \mid \forall n \in \mathbb{N} \, R_n \in \mathbb{Q}^* \mid \underset{n\to+\infty}{lim} R_n = \alpha$
$\Rightarrow P\left(\underset{n\to+\infty}{lim} R_n\right) = P(\alpha)$
Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(R_n) = 0$
$\Rightarrow \underset{n\to+\infty}{lim} 0 = P(\alpha) = 0$

4.8 **Théorème** $\forall\alpha \in \mathbb{R}^* \; P_x(x^\alpha) = \alpha$

Démonstration triviale. Par ailleurs le respect des principes régissant les dimensions en science physique impliquent directement ce résultat.

4.9 $\forall k \in \mathbb{R}^* \; \forall f \; P_x(k \times f(x)) = P_x(f(x))$

Démonstration

$P_x(k \times f(x)) = P_x(k) + P_x(f(x))$
$\Rightarrow P(k \times f(x)) = P(f(x)) + 0$
$\Rightarrow P_x(k \times f(x)) = P(f(x))$

4.10 $P_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = P_x(f(x)) - P_x(g(x))$

Démonstration

$\frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) = f(x)$
$\Rightarrow P_x\left(\frac{f(x)}{g(x)} \times g(x)\right) = P_x(f(x))$
$\Longrightarrow P_x\left(\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\right) + P_x((g(x))) = P_x(f(x))$
$\Rightarrow P_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = P_x(f(x)) - P_x(g(x))$

4.11 $\forall t \in \mathbb{R}\ P_x\left(f\left(x+t\right)\right) = P_x\left(f\left(x\right)\right)$

Démonstration

Par convention f est une fonction non conditionnelle. Par conséquent.
$\forall t \in \mathbb{R}$
$f\left(x+t\right) = \left(f^{\circ}\left(x+t\right)\right)\left(x\right)$
$\Rightarrow P_x\left(f\left(x+t\right)\right) = P_x\left(f\left(x\right)\right) \times P_x\left(x+t\right)$
$\Rightarrow P_x\left(f\left(x+t\right)\right) = P_x\left(f\left(x\right)\right) \times \dot{max}\left(P_x\left(x\right); P\left(t\right)\right)$
$\Rightarrow P_x\left(f\left(x+t\right)\right) = P_x\left(f\left(x\right)\right) \times 1$
$\Rightarrow P_x\left(f\left(x+t\right)\right) = P_x\left(f\left(x\right)\right)$

4.12 Une composition de fonctions impliquant une fonction constante est indéterminée.

Démonstration

Soit g définie par $g\left(x\right) = a \mid a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$P_x\left(\left(f^{\circ}g\right)\left(x\right)\right) = P\left(f\left(a\right)\right)$
$P_x\left(\left(g^{\circ}f\right)\left(x\right)\right) = P\left(a\right)$
Si a n'est pas un zéro de f alors $P\left(f\left(a\right)\right) = 0$
Si a est un zéro de f $P\left(f\left(a\right)\right) = \nu$
La démonstration devient trivial avec $a = 0$.

Il y a alors une non commutativité locale de la multiplication dans $\dot{\mathbb{R}}$ pour les zéros d'une fonction et les fonctions constantes d'où l'apparition d'une indétermination.

4.13 Théorème des fonctions réciproques $P_x\left(f^{-1}\left(x\right)\right) = \frac{1}{P_x(f(x))}$

Démonstration

$\left(f^{-1\circ}f\right)\left(x\right) = x$
$\Rightarrow P_x\left(\left(f^{-1\circ}f\right)\left(x\right)\right) = P_x\left(x\right)$
$\Rightarrow P_x\left(f^{-1}\left(x\right)\right) \times P_x\left(f\left(x\right)\right) = P_x\left(x\right)$
$\Rightarrow P_x\left(f^{-1}\left(x\right)\right) \times P_x\left(f\left(x\right)\right) = 1$
$\Rightarrow P_x\left(f^{-1}\left(x\right)\right) = \frac{1}{P_x(f(x))}$

4.14 Dimension de fonctions dérivées et de primitives

Conformément aux principes de dimension en science physique

$P_x\left(f'(x)\right) = P_x(f(x)) - 1$
$P_x\left(\int f dx\right) = P_x(f(x)) + 1$

5 Définitions de ν et ∞

5.1 Définition de ∞

∞ décrit une indétermination de la dimension de la fonction.

5.2 Définition de ν

ν est philosophiquement descriptible comme la “dimension du néant”.

6 Ensemble de dimension de fonction.

6.1 l’ensemble Ω_w des fonctions de dimension w

Ω_w est défini par $\Omega_w = \{f \mid P_x(f(x)) = w\}$

6.2 Ensemble $\Omega(E)$ dimension d’une équation E

si $P(E)$ dispose de n solutions $w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n$
$\Omega(E) = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{w_i}$

7 Dimension de fonctions usuelles

7.1 $P_x(abs(x)) = 1$

Démonstration

$abs(x) = \sqrt{x^2}$
$\Rightarrow P_x(abs(x)) = P_x\left(x^{1/2}\right) \times P_x\left(x^2\right)$
$\Rightarrow P_x(abs(x)) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

7.2 $P_x\left(ln\left(x\right)\right) = 0$

Démonstration

$\frac{\partial ln(x)}{\partial x} = \frac{1}{x}$
$\Rightarrow P_x\left(ln\left(x\right)\right) - 1 = P_x\left(\frac{1}{x}\right)$
$\Rightarrow P_x\left(ln\left(x\right)\right) - 1 = -1$
$\Rightarrow P_x\left(ln\left(x\right)\right) = 0$

7.3 $P_x\left(e^x\right) = \infty$

Démonstration

Le théorème de dimension des fonctions réciproques indique que
$P_x\left(e^x\right) = \frac{1}{P_x(ln(x))} = \frac{1}{0} = \infty$

7.4 $P_x\left(arccos\left(x\right)\right) = 0$

Démonstration

$P_x\left(\frac{\partial arcos(x)}{\partial x}\right) = P_x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
$\Rightarrow P\left(arccos\left(x\right)\right) - 1 = P_x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
$\Rightarrow P_x\left(arccos\left(x\right)\right) - 1 = -1$
$\Rightarrow P_x\left(arccos\left(x\right)\right) = 0$

7.5 $P_x\left(cos\left(x\right)\right) = \infty$

Démonstration

D'après le théorème de dimension des fonctions réciproques
$P_x\left(cos\left(x\right)\right) = \frac{1}{P_x(arccos(x))} = \frac{1}{0} = \infty$
En utilisant le même *modus operandi* on obtient les résultats suivants :

7.6 $P_x\left(arcsin\left(x\right)\right)=0$

7.7 $P_x\left(sin\left(x\right)\right)=\infty$

7.8 $P_x\left(arctan\left(x\right)\right)=-1$

7.9 $P_x\left(tan\left(x\right)\right)=-1$

8 Extension dans $\mathbb{C}$

Introduction
Soit E l'équation $f'\left(x\right)=\left(f^\circ f\right)\left(x\right)$
Posons $u=P_x\left(f\left(x\right)\right)$
$P\left(E\right)\leftrightarrow u-1=u^2$
$\Rightarrow u\in\left\{\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$
Or l'équation E a deux solutions
$f_1\left(x\right)=e^{\left(\frac{\pi}{3}\times\frac{-1}{6}\right)}\times x^{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}\mid x\in\mathbb{R}$
$f_2\left(x\right)=e^{\left(\frac{\pi}{3}\times\frac{-11}{6}\right)}\times x^{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}\mid x\in\mathbb{R}$
En appliquant les règles de calculs de dimension établies aux fonctions f_1 et f_2 on retrouve
$\left\{\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}\cup\left\{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}=\Omega\left(E\right)$
Les fonctions étudiées, sauf mention contraire, seront implicitement des fonctions de $\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ de la forme :
$x\mapsto z_1\times\left(x+z_2\right)^{z_3}$ tel que $z_1\in\mathbb{C}^*,z_2\in\mathbb{C},\ z_3\in\mathbb{C}^*$

8.1 Théorèmes

8.1.1 $\forall z\in\mathbb{C}^*,P_z\left(z\right)=1$

Démonstration

Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$
$f^\circ Id_{\mathbb{C}}=f$
$\Rightarrow P_z\left(f\right)\times P_z\left(Id_{\mathbb{C}}\right)=P_z\left(f\right)$
$\Rightarrow P_z\left(z\right)=1$

8.1.2 $P\left(i\right)=0$

Démonstration

$P\left(i^2\right)=P\left(-1\right)$
$\Rightarrow 2P\left(i\right)=0$
$\Rightarrow P\left(i\right)=0$

8.1.3 $\forall z \in \mathbb{C}^* \ P(z) = 0$

Démonstration

Soit z=a+i$\times b|\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
P$(z) = \dot{max}\left(P\left(a\right); P\left(i\right) \times P\left(b\right)\right)$
$\Rightarrow P(z) = max\,(0;0)$
$\Rightarrow P(z) = 0$

8.1.4 $\forall z \in \mathbb{C} \ P_x\left(f\left(x+z\right)\right) = P_x\left(f\left(x\right)\right)$

Démonstration

$f\left(x+z\right) = \left(f^{\circ}\left(x+z\right)\right)$

$\Rightarrow P_x\left(f\left(x+z\right)\right) = P_x\left(f\left(x\right)\right) \times P_x\left(x+z\right)$

$\Rightarrow P_x\left(f\left(x+z\right)\right) = P_x\left(f\left(x\right)\right) \times \dot{max}\left(x;z\right)$

$\Rightarrow P_x\left(f\left(x+z\right)\right) = P_x\left(f\left(x\right)\right) \times max\left(1;0\right)$

$\Rightarrow P_x\left(f\left(x+z\right)\right) = P_x\left(f\left(x\right)\right)$

8.1.5 $\forall x \in \mathbb{R} \ P_x\left(x^i\right) = \pm i$

Démonstration

$x^{i^2} = \left(x^{i\circ}x^i\right)(x)$
$\Rightarrow P_x\left(x^{i^2}\right) = P_x\left(\left(x^{i\circ}x^i\right)(x)\right)$
$\Rightarrow P_x\left(x^{i^2}\right) = P_x\left(x^{i^2}\right) \times P_x\left(x^{i^2}\right)$
Or $x^{i^2} = x^{-1}$
$\Rightarrow P_x\left(x^{i^2}\right) = P_x\left(x^{-1}\right)$
$\Rightarrow P_x\left(x^{-1}\right) = P_x\left(x^i\right)^2$
$\Rightarrow -1 = P_x\left(x^i\right)^2$
$\Rightarrow \sqrt{-1} = P_x\left(x^i\right)$
$\Rightarrow P_x\left(x^i\right) = \pm i$

8.1.6 $\forall x \in \mathbb{R}^* \, \forall z \in \mathbb{C}^* \, P_x(x^z) \in \{z; \overline{z}\}$

Démonstration

soit $a \in \mathbb{R}^* \, b \in \mathbb{R}^* \mid z = a + ib$
$x^z = x^{a+ib}$
On sait que $P_x(x^i) = \pm i$
$\Rightarrow P_x(x^z) = P_x(x^a) + P_x(x^{ib})$
$\Rightarrow P_x(x^z) = a \pm ib$
$\Rightarrow P_x(x^z) \in \{z; \overline{z}\}$

8.1.7 $P_z(Im(z)) = P_z(Re(z)) = 1$

Preuve
$Re(z) + i \times Im(z) = z$
$\Rightarrow \dot{max}(P_z(Re(z)); P_z(i \times Im(z))) = P_z(z)$
$\Rightarrow \dot{max}(P_z(Re(z)); P(i) + P_z(Im(z))) = 1$
$\Rightarrow \dot{max}(P_z(Re(z)); P_z(Im(z))) = 1$
$\Rightarrow P_z(Re(z)) \leq P_z(Im(z)) \leq 1$
$Re(z) = z - i \times Im(z)$
$\Rightarrow P_z(Re(z)) = \dot{max}(P_z(z); P_z(Im(z)))$
$\Rightarrow P_z(Re(z)) = P_z(z) = 1$
$\Rightarrow 1 \leq P_z(Im(z)) \leq 1$
$\Rightarrow P_z(Im(z)) = 1$
À l'aide d'un raisonnement symétrique , on démontre de manière triviale que $P_z(Re(z)) = 1$

9 Application à la fonction ξ de Riemann

9.1 Lemme de causalité.

Déterminer la partie imaginaire d'un zéro non-trivial de la fonction ξ de Riemann à l'aide d'un instrument de mesurant $Im(s_0) \Rightarrow Re(s_0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration

$\xi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^s$
Soit $s_0 \in \{zéro\, non - triviaux\, de\, \xi\} \mid Re(s_0) \in]0; 1[$
$\Rightarrow \xi(s_0) = 0$
$i \times Im(\xi(s_0)) + Re(\xi(s_0)) = \xi(s_0)$
Or $Re(\xi(s_0))$ et $i \times Im(\xi(s_0))$ sont d'essences différentes. D'après l'axiome de l'essence l faut normaliser de manière qualitative et quantitative la somme $i \times Im(\xi(s_0)) + Re(\xi(s_0))$.
$\Rightarrow i \times Im(\xi(s_0)) = Re(\xi(s_0)) = 0$

Donc pour tous facteurs de conversion $k \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow k \times i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right) = i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right) = Re\left(\xi\left(s_0\right)\right) = 0$
Donc la normalisation quantitative est réalisée car tous les facteurs de conversion sont équivalents.
Normalisation qualitative par $i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right)$
$Re\left(\xi\left(s_0\right)\right) + i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right)$ se normalise en $2i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right)$
$P_{\frac{1}{n}}\left(2i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right)\right) = 2i \times s_0 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1$
$\Rightarrow Im\left(P_{\frac{1}{n}}\left(2i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right)\right)\right) = 2 \times Re\left(s_0\right)$
D'une part, on sait que
$2i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right) \neq= \xi\left(s_0\right)$
$\Rightarrow P_{\frac{1}{n}}\left(2i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right)\right) \neq= P_{\frac{1}{n}}\left(\xi\left(s_0\right)\right)$
$\Rightarrow 2i \times P_{\frac{1}{n}}\left(\xi\left(s_0\right)\right) \neq= s_0 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1$
$\Rightarrow \left(Im\left(2i \times s_0\right)\right) = Im\left(s_0\right)$
$\Rightarrow 1 = \frac{Im(s_0)}{2Re(s_0)}$
Utilisons un instrument de mesure en $Im\left(s_0\right)$. Depuis le référentiel de l'instrument l'équation précédente retourne un résultat d'unité $Im\left(s_0\right)$. Suivant le principe de conservation de l'unité de par et d'autre de la relation $=$ l'unité de mesure retournée est $Im\left(s_0\right)$.
$\Rightarrow Im\left(s_0\right) 1 = \frac{1}{2Re(s_0)} Im\left(s_0\right)$
$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2Re(s_0)}$
$\Rightarrow Re\left(s_0\right) = \frac{1}{2}$
un raisonnement identique mettant en jeu $\bar{s_0}$ offre le même résultat. Ce qui est conforme avec l'égalité $s_0 \in \{zéro\, non - trivaux\, de\, \xi\}$ $\xi\left(s_0\right) = \xi\left(\bar{s_0}\right) = 0$

9.2 Lemme de violation de causalité.

Il est impossible de déterminer la partie réelle d'un zéro non-trivial de ξ.

Démonstration

$\xi\left(s\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^s$
Soit $s_0 \in \{zéro\, non - triviaux\, de\, \xi\} \mid Re\left(s_0\right) \in]0; 1[$
$\Rightarrow \xi\left(s_0\right) = 0$
$\Rightarrow i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right) + Re\left(\xi\left(s_0\right)\right) = \xi\left(s_0\right)$
Or $Re\left(\xi\left(s_0\right)\right)$ et $i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right)$ sont d'essences différentes. D'après l'axiome de l'essence l faut normaliser de manière qualitative et quantitative la somme $i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right) + Re\left(\xi\left(s_0\right)\right)$.
$i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right) = Re\left(\xi\left(s_0\right)\right) = 0$
Donc pour tous facteurs de conversion $k \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow k \times i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right) = i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right) = Re\left(\xi\left(s_0\right)\right) = 0$
Donc la normalisation quantitative est réalisée car tous les facteurs de conversion sont équivalents.

Normalisons qualitative par $Re\left(\xi\left(s_0\right)\right)$

Soit $s_0 \in \{z\acute{e}ro\, non - triviaux\, de\, \xi\} \mid Re\left(s_0\right) \in]0;1[$

Normalisation qualitative en $Re\left(\xi\left(s_0\right)\right)$

$Re\left(\xi\left(s_0\right)\right) + i \times Im\left(\xi\left(s_0\right)\right)$ devient $2 \times Re\left(s_0\right)$

$P_{\frac{1}{n}}\left(2Re\left(\xi\left(s_0\right)\right)\right) = 2 \times s_0 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1$

$\Rightarrow Re\left(P_{\frac{1}{n}}\left(2 \times Re\left(\xi\left(s_0\right)\right)\right)\right) = 2 \times Re\left(s_0\right)$

D'une part, on sait que

$2Re\left(\xi\left(s_0\right)\right) \neq= \xi\left(s_0\right)$

$\Rightarrow P_{\frac{1}{n}}\left(2Re\left(\xi\left(s_0\right)\right)\right) \neq= P_{\frac{1}{n}}\left(\xi\left(s_0\right)\right)$

$\Rightarrow 2 \times P_{\frac{1}{n}}\left(\xi\left(s_0\right)\right) = s_0 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1$

$\Rightarrow Re\left(2Re\left(P_{\frac{1}{n}}\zeta\left(s_0\right)\right)\right) == Re\left(Re\left(s_0\right) \times \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1\right)$

$\Rightarrow 2Re\left(s_0\right) \times \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1 = Re\left(s_0\right) \times \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1$

Donc

Soit $Re\left(s_0\right) =0$ ce qui est impossible car $Re\left(s_0\right) \in]0;1[$.

$Soit\, 2 = 1$.

Ce qui est absurde.

Donc la détermination de la partie réelle d'un zéro non-trivial de ξ est impossible.

9.3 Théorème : Les zéro non-triviaux de la fonction ξ de Riemann ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$.

Démonstration.

$\forall s_0 \in \{z\acute{e}ro\, non - triviaux\, de\, \xi\} \mid Re\left(s_0\right) \in]0;1[$

D'après le lemme de violation de causalité, il est impossible de déterminer la partie réelle de s_0.Or il existent des zéros non-triviaux de ξ.

Il est donc possible de déterminer la partie imaginaire de s_0.

Or le lemme de causalité affirme que déterminer $Im\left(s_0\right) \Rightarrow Re\left(s_0\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \forall s_0 \in \{z\acute{e}ro\, non - triviaux\, de\, \xi\} \mid Re\left(s_0\right) \in]0;1[\; Re\left(s_0\right) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Conclusion

Les mathématiques ont démontré une efficacité prédictive en science physique remarquable. En utilisant l'un des principes fondateurs de la physique qu'est le système international des unités. La théorie de l'analyse dimensionnelle tire robustesse de l'usage d'un des principes sans lequel la physique ne peut fait sens. On pourrait ainsi dire que la robustesse de la théorie de l'analyse dimensionnelle et des résultats qui en découles viennent du fait qu'une masse se mesure en kilogramme, une longueur en mètre, etc...

Un lien profond entre le principe de causalité et l'hypothèse Riemann semble exister. Le principe de causalité permettant de tracer la démonstration de l'hypothèse susdite.