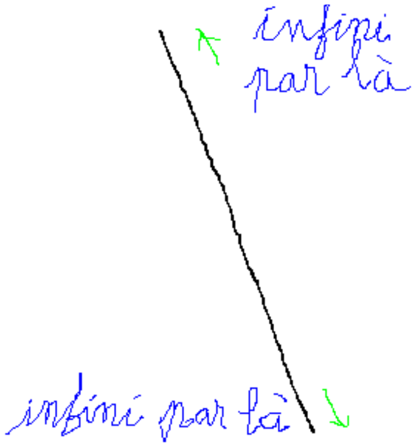
Mais
pourquoi
les médiatrices
des côtés d'un triangle
sont-elles concourantes ?

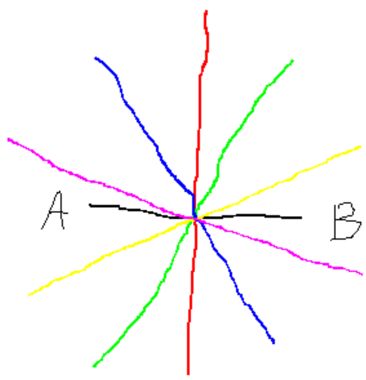
Nestor Donald et les nouveaux mystères de Mathville. Aujourd'hui, dans le quartier Géométry.

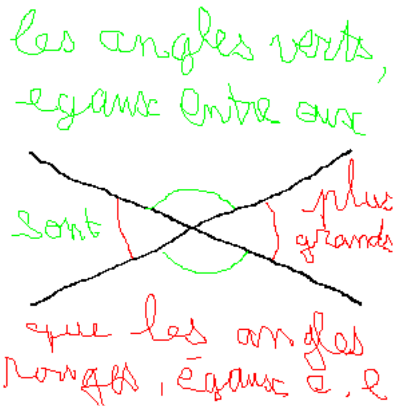


Une droite, on ne peut pas la tracer. Parce qu'elle est infinie, d'un côté comme de l'autre. On ne peut en tracer qu'un morceau, un segment.
Comment faire, alors, si le prof veut qu'on trace une droite ? On va tracer un long segment. On va symboliser le fait qu'elle est infinie en lui faisant occuper tout l'espace dont elle dispose. À part peut-être la marge. Ça se fait pas d'écrire dans la marge, ni d'y tracer.

En géométrie, un segment est donc un morceau de droite. En fait, on peut pas le tracer non-plus ! Parce qu'il est infiniment fin. Épaisseur = 0. La droite aussi, d'ailleurs. Le problème vient de la notion de point : dimension = 0. Donc invisible. Inexistant ? Ça se discute. On va dire que ça existe, quelque part dans la pensée, c'est une idée, abstraite. Et pour le voir, notre point, on va lui donner une épaisseur, mais la plus petite possible. Avec un crayon très bien taillé, un porte-mine fin, etc. La mine du compas, pareil. Si le trait est épais, le tracé est moins précis. Et on repassera pas deux fois. Un seul trait, sans appuyer comme un dingue, surtout que si c'est bien taillé, si c'est fin, c'est fragile.
En général, on donne un nom à chacune de ses extrémités, et on s'en sert pour nommer le segment lui-même. Sur le dessin de Fifi, les points situés aux extrémités, il les a appelés A et B.
Et donc le segment va être noté [AB], avec des crochets.
Droite et segments sont droits. (Pas comme sur les dessins des canards !)

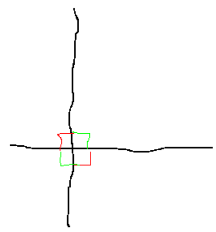
Puisqu'un segment est fini, qu'il possède une longueur, il a aussi un milieu. C'est le point qui le partage en deux segments de même longueur. Par le milieu de ce segment, on peut s'amuser à faire passer une droite, et une autre, et une autre. En fait, on peut en faire passer une infinité, en variant leur inclinaison, l'angle qu'elles forment avec le segment. Là, Loulou en a fait passer cinq au milieu du segment.

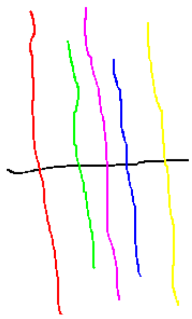




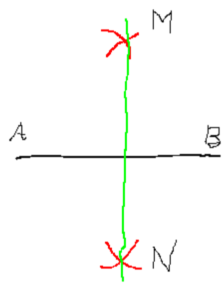
On vient de parler d'angle. Rirette a tracé deux droites sécantes, qui forment donc un angle, deux même. Autant dire quatre, deux à deux opposés par le sommet. Si on rapproche les droites l'une de l'autre en en faisant tourner une, les deux droites vont devenir confondues : l'angle rouge sera égal à 0°, et l'angle vert à 180 ° (angle plat).

Et si on éloigne les deux droites au maximum l'une de l'autre, toujours en en tournant une autour du point d'intersection, ça aboutit à l'angle droit : le quart de tour, l'angle formé par la verticale et l'horizontale, que l'on retrouve en de multiples lieux des paysages humains : murs, fenêtres, tables et tableaux, carreaux et carrés et carrelages, cahiers et livres, images, écrans, etc. La croix. La bannière.





Ici, Rirette a tracé cinq droites perpendiculaires au segment [AB]. Si ces canetons se servaient de règles, d'équerres et de compas, on verraient bien que les cinq droites de Rirette, toutes perpendiculaires au segment, sont parallèles entre elles.



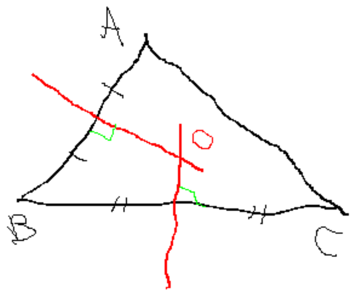
Et alors quand on trace une droite qui passe au milieu du segment, et en plus, qui lui est perpendiculaire, ça s'appelle la médiatrice du segment. Le mot contient la racine latine qui veut dire *milieu*. Le *médius*, aussi appelé majeur, est au milieu de la main. La mer *Méditerranée* est au milieu des terres. (Afrique, Europe, Asie). *Mediapart* ne tient pas son nom de sa place sur l'échiquier politique, mais du mot *media*, entre les hommes. Un *medium* est entre les hommes, ou alors entre les hommes et les esprits. Le *médiateur* s'interpose entre deux groupes en conflit. La *médiatrice* du segment [AB] sépare le plan en deux groupes de points : ceux qui sont plus proches de A, et ceux qui sont plus proches de B. Faites cette expérience : tracez un point à droite de la médiatrice, et un autre à gauche. Mesurez leurs distances à A et à B, et concluez (faites ça sur un vrai tracé aux instruments !).

Et que dire d'un point situé sur la médiatrice ? Ni à gauche, ni à droite ? Voyez le dessin de Louloute : M et N, qui sont tous deux sur la médiatrice, sont tous deux équidistants de A et de B. On a d'une part AM = BM, et d'autre part AN = BN. C'est une propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment :
si un point appartient à la médiatrice d'un segment, il est équidistant de ses extrémités ;
si un point est équidistant des extrémités d'un segment, il se trouve sur sa médiatrice.
C'est un nouvel exemple de théorème possédant une réciproque.

Cela débouche d'ailleurs sur une construction plus efficace, plus soignée, plus rapide : Celle qu'a utilisée Louloute. Elle a piqué le compas successivement sur les deux extrémités, et a tracé de chaque côté du segment deux arcs qui se coupent. Les points trouvés ainsi, de part et d'autre du segment, sont bien équidistants des extrémités. On n'a plus qu'à tracer la droite qui passe par eux : c'est la médiatrice.

Quand Donald est arrivé, il a trouvé les tracés super (lui aussi c’est un canard. Vous avez déjà vu un canard se servir d’une règle, vous ?).

Mais le moment redouté est arrivé ! Personne n’avait trouvé la clé de l’énigme.

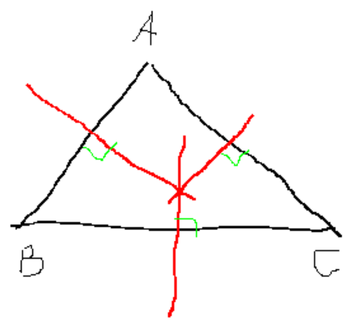


Pourquoi les médiatrices des trois côtés d’un triangle sont-elles concourantes ?

— Ben parce que ! a dit Riri.
— Ça se voit, a dit Louloute. (Sur le dessin qu’a fait Donald, c’est pourtant pas si clair)
Donald ricane et cancane :
— Oui, mais ça peut se démontrer. Regardez.
Il refait un autre triangle, et trace deux médiatrices.
— Qu’est-ce qu’on constate ?
— Elles sont sécantes, dit Riri.
— Oui, ajoute Fifille. C’est forcé. Elles seraient parallèles si les points A, B et C étaient alignés. Parce que deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles. Mais comme ce n’est pas le cas, elles sont sécantes.
— Et donc elles se coupent en un point qu’on va appeler O. O est sur la médiatrice de [AB]. Qu’est-ce qu’on en déduit ?
— …

Silence général.

— Vous vous rappelez pas la propriété caractéristique ?
— Ah si dit Loulou. Si O est sur la médiatrice de [AB], il est équidistant de A et de B.
On a OA = OB.
— Bon. Mais il est aussi sur la médiatrice de [BC] !
— Alors, dit Fifi, on a OB = OC !
— Parfait. On a donc établi que OA = OB, et que OB = OC. Qu’est-ce qu’on en déduit ?
Rirette a trouvé :
— Eh ben forcément, OA = OC !
— Et voilà. Comment on conclut ?
— On utilise encore une fois la propriété caractéristique, mais la réciproque cette-fois-ci, assure Louloute. Puisque O est équidistant des extrémités du segment [AC], il est situé sur sa médiatrice !
— Bravo les canetons, exulte Donald. On a montré que la troisième médiatrice passe par le point d’intersection des deux premières. Les trois médiatrices sont forcément concourantes.



L’enquête est finie.
On peut ajouter que A, B, C se trouvant tous les trois à la même distance de 0, ils se trouvent sur le cercle de centre 0, et de rayon égal à cette distance. On nomme ce cercle le cercle circonscrit au triangle.
Vous devriez faire ces croquis, mais pas comme des canards, avec des instruments, règle et compas.
Vous pouvez aussi faire les expériences suivantes :
1) Avec un triangle ne possédant que des angles aigus.
2) Avec un triangle ayant un angle obtus.
3) Avec un triangle-rectangle.
Que constatez-vous ?