

Nombres, fonctions, polynômes, équations

Voici une gymnastique un peu hors-programme, mais qui recoupe tellement de notions parfaitement aux programmes du collège et du lycée qu'elle mérite notre attention.

Par exemple, on va finir par diviser les polynômes entre eux ! Carrément. Ajouter, soustraire, multiplier les polynômes, pas de souci. Mais diviser ! Notez que c'est un peu comme chez les nombres usuels. La division, c'est toujours le plus difficile. En explorant les confins « interdits » puisque hors programme des mathématiques, on consolidera énormément de choses parfaitement au menu « légal ». En attendant, on va poser quelques bases.

Quelques petites notions.

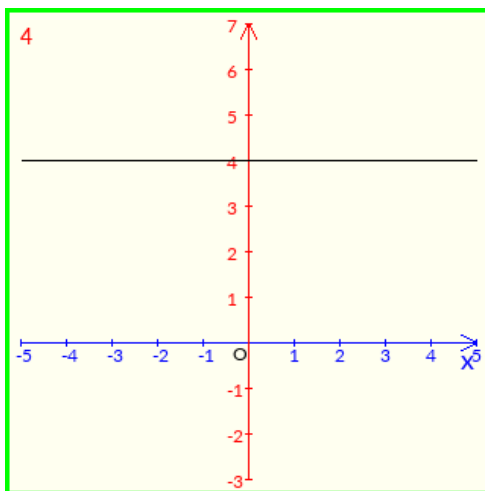
Un polynôme est une somme de termes tous construits sur le même modèle : une puissance de la variable, (c'est souvent x), affectée d'un coefficient. Cette structure s'appelle un monôme. Un seul « nôme », c'est à dire un seul nom¹, et plusieurs dans un polynôme. Nous nous bornerons au cas **réel** : les coefficients aussi bien que la variable sont des nombres, entiers, rationnels, irrationnels, enfin bref, réels. Nous ne nous occuperons pas pour l'instant des nombres dits « complexes », qui n'arrivent qu'en terminale, et qu'au seizième siècle.

Voici par exemple un polynôme de degré 2 : $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$

« **degré 2** », car la plus grande puissance de x est 2. Vous me direz, c'est la seule ! C'est donc forcément la plus grande ! Et la plus petite !? Vrai pour la première chose, faux pour la seconde. Car le x tout seul avec son 5, dans le $5x$, il est à la puissance 1, en fait. Eh oui ! 10, par exemple, c'est 10 tout seul, c'est dix présent une seule fois dans le **produit**, et c'est donc 10 à la puissance 1.

Et c'est pas tout : y a encore une autre puissance de x ! Où ça ? Là. Où ? le +3 ! Il est égal à 3 fois x à la puissance zéro ! on pourrait écrire $3x^0$ à la place de 3. Car $x^0 = 1$.

En effet, x^0 , c'est un produit qui contient combien de x ? ben 0. Or, un produit, quand on a tout retiré, ce qui reste, c'est pas 0, c'est 1 !



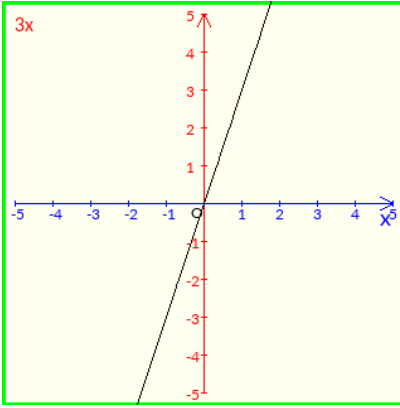
$$Q(x) = 4$$

La plus petite puissance possible pour un des monômes d'un polynôme, c'est zéro. Le monôme de degré zéro, on va l'appeler le monôme constant. Ou même la **constante**. Si un polynôme se réduit à un monôme de degré 0, ça nous donne un nombre constant, ça nous donne une fonction constante.

Le degré zéro, pour un polynôme, c'est la constance.

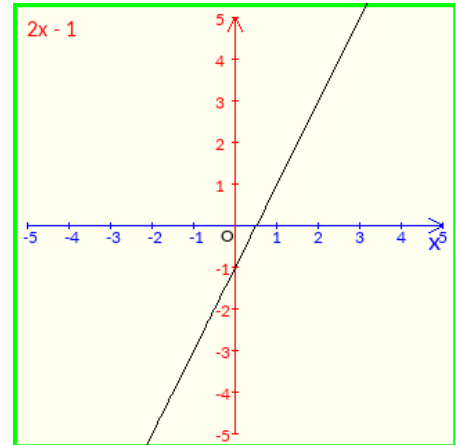
¹ Plus exactement « groupe nominal ». Cette idée est importante : $3x^2$, c'est comme 3 poires ! $2x + 3x^2$, c'est comme 2 pommes et 3 poires : on ne peut pas réduire. Par contre, $3x + 2x = 5x$; $3x^2 + 2x^2 = 5x^2$. Les maths servent entre autres choses à compter des objets de même nature.

$$R(x) = 3x$$

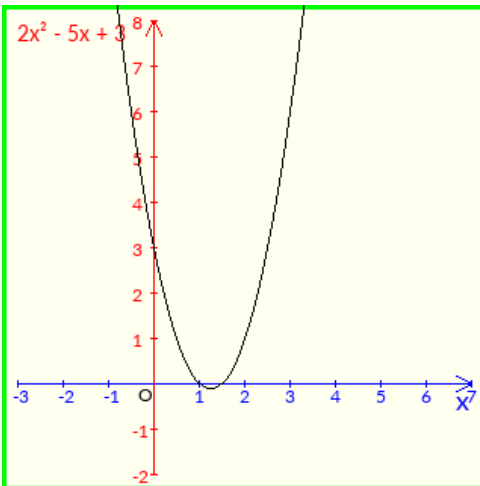


Si un polynôme se réduit à un monôme de degré 1, par exemple $P(x) = 3x$, ça donne une **fonction linéaire**. Par une telle fonction, l'image de 0 est forcément 0 : le point O, origine du repère, de coordonnées (0, 0), appartient donc à la courbe de la fonction. Il en ira de même de tout polynôme dont le monôme de puissance 0, le monôme constant, est nul.

$$S(x) = 2x - 1$$



Pour une fonction affine, c'est à dire une fonction qui à x associe un polynôme en x de degré 1, donc ayant un monôme de degré 1, et éventuellement un de degré 0, donc constant, cette constante s'appelle **ordonnée à l'origine**.²



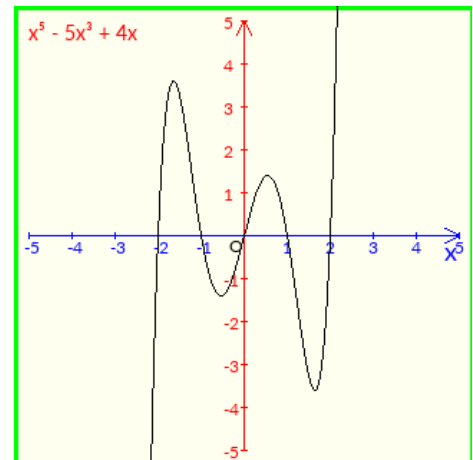
$$P(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

Et maintenant, on sort des fonctions affines, c'est à dire en ce qui concerne la représentation graphique, on sort de la **droite**. La courbe d'une fonction polynôme de degré supérieur à 1, donc au moins égal à 2, est une vraie courbe, pas une droite (en maths, il y a des courbes qui sont droites !)

Par exemple $P(x)$ mentionné plus haut. Ou encore $A(x)$, mentionné plus bas.

$$T(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$$

Et voilà un polynôme rigolo qui s'annule 5 fois, ce qui est le max pour un polynôme de degré 5.



² On pourrait très bien garder le terme pour tout polynôme. Quelque soit son degré, il prendra toujours la valeur du coefficient de son monôme constant si on attribue la valeur zéro à la variable.

Par exemple, calculons $P(0) = 2 \times 0^2 - 5 \times 0 + 3 = 0 + 0 + 3 = 3$. 3 est donc l'**ordonnée** du point de la courbe de P quand elle passe au dessus, ou au dessous, de l'**origine**.

Exercices (les 2 et 3 s'éclairent l'un l'autre)

1) Pour chacune de ces fonctions polynômiales, lire graphiquement le nombre et les valeurs éventuelles de leurs *racines* : solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Vérifier par le calcul que ces valeurs sont bel et bien solutions.

2) En déduire la factorisation de $P(x)$ et $T(x)$.

Vérifier en redéveloppant.

3) Soit $A(x) = (x + 3)(2x - 1)$

Résoudre immédiatement (je veux dire sans développer, en tout cas) l'équation $A(x) = 0$.

Quelle est la **règle** (ou **théorème**) mathématique qu'on a utilisée dans les exercices 2 et 3 ?

Tracer la courbe de A dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (petits carreaux, c'est mieux).

À titre d'exercice supplémentaire, donnez sa forme développée.

On va maintenant retrouver numériquement les solutions trouvées en 1 pour certains polynômes (ce qui tiendra lieu de vérification) :

4) Pour rigoler, en seconde, troisième, quatrième, et même en sixième et cinquième :

résoudre $S(x) = 0$

$R(x) = 0$

5) Résoudre $Q(x) = 0$

6) Développez $2(x - 5/4)^2 - 1/16$; si vous avez bon, vous devez constater quelque chose relativement à $P(x)$. Résoudre alors $P(x) = 0$, et faire le rapprochement avec la résolution graphique de la question 1. (Si vous êtes en première, bien sûr, vous avez pu résoudre sans cette forme canonique, en utilisant la méthode du discriminant).

Voilà.

Dans quelques jours, suivra un PDF de 50 exercices sur les polynômes, nombres, fonctions, etc.